

**Вопросы к экзамену по математическому анализу
для первого курса первого семестра ФКТИ
в 2023/2024 учебном году**

Лектор Осетров А.В.

Теория пределов и непрерывность

1. Предел функции в точке (определение через окрестности). Свойства функций, имеющих предел в точке: теорема единственности (без доказательства), теоремы о пределе постоянной функции и ограниченности функции, имеющей предел. Основные правила предельного перехода (предел суммы, произведения, частного, предельный переход в неравенстве), без доказательства.

2. Односторонние пределы функции в точке, пределы функции на бесконечности (дать определения, привести примеры).

3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции (дать определения, привести примеры). Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями (теоремы, без доказательства).

4. Непрерывность функций (три определения через предел, окрестности и приращения). Теоремы о свойствах непрерывных функций (для суммы, произведения и частного функций; сложной функции и элементарной функции), без доказательства. Нахождение пределов элементарных функций в области их определения.

5. Виды неопределенностей (записать 7 неопределенностей). Два признака существования предела (о сжатой переменной, о пределе монотонной функции), без доказательства. Функция $\frac{\sin x}{x}$, первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (без доказательства).

6. Функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (без доказательства).

7. Следствия второго замечательного предела (четыре следствия с доказательством).

8. Сравнение бесконечно малых, эквивалентные бесконечно малые и их свойства (дать определения, привести примеры).

9. Точки разрыва функций и их классификация (дать определения, привести примеры).

10. Функции, непрерывные на замкнутом промежутке (дать определения, сформулировать и пояснить теоремы Вейерштрасса, Больцано-Коши и следствие из последней, все теоремы без доказательства).

Производные и дифференциалы

11. Производная (определение через предел). Производные функций x^m , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$ (с доказательством). Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к плоской кривой.

12. Дифференцируемость функций. Необходимое условие дифференцируемости функции (с доказательством). Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного), без доказательства. Производные $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (с доказательством).

13. Производная сложной функции (теорема с доказательством на примере двухзвенной сложной функции). Параметрически заданные функции и их дифференцирование (теорема с доказательством).

14. Производная обратной функции (теорема с доказательством). Производные обратных тригонометрических функций (с доказательством).

15. Дифференциал функции (определение), его связь с приращением (соотношение без доказательства) и геометрический смысл.

16. Основные правила нахождения дифференциала. Инвариантность формы дифференциала сложной функции (теорема с доказательством).

17. Производные и дифференциалы высших порядков (определения). Нахождение дифференциала второго порядка сложной функции.

Основные теоремы дифференциального исчисления

18. Теорема Лагранжа (без доказательства, с пояснением). Формула конечных приращений.
19. Формула Тейлора (с доказательством). Остаточный член в форме Лагранжа (без доказательства).
20. Теорема Лопиталья (доказательство для частного случая непрерывных функций). Правило Лопиталья. Привести примеры.

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

21. Достаточные признаки постоянства и монотонности дифференцируемой функции (теорема с доказательством).
22. Локальные экстремумы функции (определения). Необходимый признак экстремума (теорема с доказательством). Стационарные, особые и критические точки (определения). Примеры наличия и отсутствия экстремума в стационарных и особых точках.
23. Первый достаточный признак локального экстремума (по первой производной, теорема с доказательством).
24. Второй достаточный признак локального экстремума (по второй производной, теорема с доказательством).
25. Выпуклость и вогнутость графика функции (определения). Достаточные признаки выпуклости и вогнутости графика функции (теорема с доказательством).
26. Точки перегиба графика функции (определение). Необходимые и достаточные условия точки перегиба (без доказательства, с пояснением). Примеры наличия и отсутствия точки перегиба в случае выполнения каждого из необходимых условий точки перегиба.
27. Асимптоты графика функции (определение, получение соотношений для нахождения асимптот).

Неопределенный интеграл

28. Первообразная функция. Теоремы о виде первообразной (с доказательством) и о существовании первообразной (без доказательства). Неопределенный интеграл и его геометрический смысл. Таблица простейших интегралов.
29. Основные свойства неопределенного интеграла (пять свойств с доказательством: производная интеграла, дифференциал интеграла, интеграл от дифференциала, и два свойства линейности интеграла).
30. Замена переменной в неопределенном интеграле (теорема с доказательством). Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ (длинный логарифм). Правило подведения под знак дифференциала.
31. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле (теорема с доказательством). Примеры: $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ и $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$.
32. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных дробей и простейших дробей.
33. Интегрирование рациональных функций от тригонометрических (теорема с доказательством). Примеры: $\int \frac{dx}{\sin x}$ и $\int \frac{dx}{\cos x}$.
34. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Некоторые неберущиеся интегралы.