

**Вопросы к экзамену по математическому анализу
для первого курса второго семестра ФКТИ
в 2022/2023 учебном году**

Лектор Осетров А.В.

Определенный интеграл

1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Теорема существования (без доказательства). Основные свойства определенного интеграла, выраженные равенствами (5 свойств с доказательством: о независимости от обозначения переменной интегрирования, два свойства линейности, о перестановке пределов, о разбиении интервала интегрирования).

2. Теоремы о знаке определенного интеграла, об интегрировании неравенств (включая следствие о модуле интеграла) и об оценке определенного интеграла; все теоремы и следствие с доказательством.

3. Теорема о среднем значении определенного интеграла (с доказательством), ее геометрический смысл.

4. Теорема (Барроу) о производной определенного интеграла по верхнему пределу (с доказательством).

5. Теорема о связи определенного и неопределенного интегралов (с доказательством). Формула Ньютона–Лейбница.

6. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле (с выводом формул). Интегрирование в симметричных пределах четных и нечетных функций.

7. Несобственный интеграл с бесконечными пределами: определения, признаки сходимости и расходимости для знакопостоянной подынтегральной функции (три признака сравнения без доказательства), интегралы для сравнения.

8. Несобственный интеграл с бесконечными пределами: определения, признак абсолютной сходимости (без доказательства), понятие условной сходимости.

9. Несобственный интеграл от неограниченной функции: определения, признаки сходимости и расходимости (без доказательства), интегралы для сравнения.

10. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах (с выводом формул).

11. Вычисление длин дуг плоских кривых в декартовых и полярных координатах (с выводом формул).

12. Вычисление объемов тел по известной площади поперечного сечения и тел вращения (с выводом формул).

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

13. Функции нескольких переменных: понятие, способы задания, определения предела и непрерывности. Частные приращения, частные производные и частные дифференциалы. Полное приращение и полный дифференциал.

14. Производные сложных функций одной и нескольких переменных, полная производная (теоремы без доказательства).

15. Полный дифференциал сложной функции нескольких переменных (инвариантность его формы, с доказательством). Правила нахождения полного дифференциала (доказательство на примере дифференциала произведения).

16. Производные функций, заданных неявно (с выводом формул).

17. Частные производные высших порядков.

18. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой в пространстве: определения, вывод уравнений.

19. Касательная плоскость и нормаль к поверхности: определения, вывод уравнений.

20. Локальные экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия (без доказательства), их геометрический смысл для функции двух переменных.

Числовые, функциональные и степенные ряды

21. Определение числового ряда; понятия частичной суммы ряда, суммы ряда, сходимости ряда, остатка ряда. Геометрическая прогрессия как пример числового ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда (с доказательством). Свойства сходящихся рядов (без доказательства).

22. Ряд с положительными членами. Три признака сравнения: сходимости, расходимости и предельная форма признака сравнения (без доказательства).

23. Ряд с положительными членами (определение). Признаки Даламбера и Коши (без доказательства).

24. Ряд с положительными членами (определение). Интегральный признак Коши (без доказательства). Ряд Дирихле и гармонический ряд (исследование сходимости).

25. Знакопередающийся ряд (определение). Признак Лейбница (без доказательства). Знакопеременный ряд (определение). Понятия абсолютной и условной сходимости. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов (без доказательства) и теорема Римана условно сходящихся рядов (без доказательства).

26. Определение функционального ряда, понятие суммы ряда и области сходимости ряда. Определение степенного ряда. Теорема Абеля (без доказательства). Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов (без доказательства).

27. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена (с приведением формул без вывода). Понятие об аналитических функциях. Остаточный член ряда Тейлора в форме Лагранжа (формула без доказательства).

28. Ряд Маклорена для e^x , $\sin x$, $\cos x$ (с выводом выражений и нахождением радиуса сходимости).

29. Биномиальный ряд (с выводом выражений и нахождением радиуса сходимости за исключением концов интервала сходимости)

30. Ряд Маклорена для $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcsin} x$ (с выводом выражений и нахождением радиуса сходимости).

Ряды и интегралы Фурье

31. Ортогональная и ортонормированная система функций (определения). Обобщенный ряд Фурье (понятие и вывод соотношений для обобщенных коэффициентов).

32. Ортогональность тригонометрической системы функций (с доказательством). Тригонометрический ряд Фурье для периодической функции (получение соотношений из обобщенного ряда Фурье). Теорема Дирихле (без доказательства).

33. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций (с получением формул из тригонометрического ряда Фурье).

34. Разложение в ряд Фурье непериодической функции, заданной на конечном промежутке. Гармонический анализ периодической функции, понятия спектра амплитуд и спектра фаз.

35. Ряд Фурье в комплексной форме (с выводом формул из тригонометрического ряда Фурье).

36. Интегральная формула Фурье и двойной интеграл Фурье (с выводом соотношений из тригонометрического ряда Фурье).

37. Косинус-интеграл Фурье и синус-интеграл Фурье (с получением из интегральной формулы Фурье).

38. Интеграл Фурье в комплексной форме (с выводом соотношений из двойного интеграла Фурье). Прямое и обратное преобразования Фурье.

39. Спектр непериодической функции. Связь между спектрами периодической и непериодической функций.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

40. Основные понятия, определения и теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: порядок; линейность; задача Коши; теорема Пикара (без доказательства); общее, частное и особое решения.

41. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка: однородное и неоднородное уравнение, решение однородного уравнения методом разделения переменных, структура общего решения линейного неоднородного уравнения, понятие о методе вариации произвольной постоянной при решении неоднородного уравнения.

42. Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного дифференциального уравнения.

43. Однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: определение, характеристическое уравнение и порядок нахождения общего решения.

44. Структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения. Метод неопределенных коэффициентов для неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Кратные интегралы

45. Двойной интеграл как предел интегральной суммы, теорема существования (без доказательства), приложения, основные свойства (без доказательства). Применение двойного интеграла для определения площади поверхности.

46. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Замена переменных в двойном интеграле (с выводом формулы). Вычисление двойного интеграла в полярных координатах (с нахождением якобиана).

47. Тройной интеграл как предел интегральной суммы, теорема существования (без доказательства), приложения, основные свойства (без доказательства). Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

48. Замена переменных в тройном интеграле (без доказательства). Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах (с нахождением якобиана).