

Индивидуальное практическое задание по теме «Численное интегрирование»

Используйте три описанных ниже подхода для вычисления площади вашей руки. Исходные данные в данной работе следует брать из предыдущего задания по интерполяции, где рука была оцифрована по точкам контура. (Для сохранения в файл и последующего чтения из файла точек контура используйте функции `save` и `load`).

Подход № 1.

Рука представляется в виде плоского замкнутого многоугольника, т.е. точки на контуре соединяются между собой отрезками (рис. 1). Площадь такого многоугольника легко вычислить. В MATLAB есть функция `polyarea`, а используемую при этом формулу и ее вывод легко найти в Интернете по ключевым словам “*polygon area*” (это рекомендуется проделать для повышения эрудиции и подготовки к защите работы).

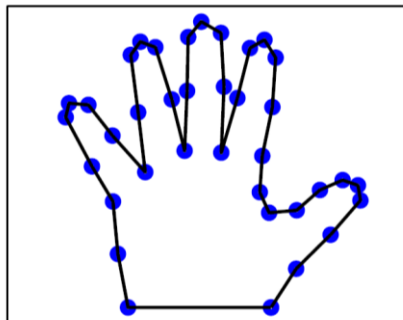


Рис. 1. Контур руки в виде замкнутого многоугольника

Подход № 2.

Область руки разбивается на квадраты (рис. 2), при этом формируется набор точек, расположенных в узлах сетки с шагом h , например,

$$[u, v] = \text{meshgrid}(x_{\min}:h:x_{\max}, y_{\min}:h:y_{\max})$$

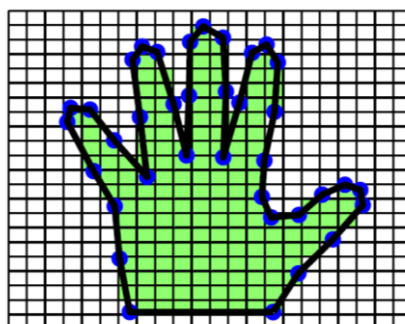


Рис. 2. Область руки, разбитая на квадраты, с выделением квадратов, включаемых в расчет площади

Для каждого такого узла u, v можно определить его принадлежность внутренней или внешней части многоугольника, используя функцию MATLAB `inpolygon`, например,

$$k = \text{inpolygon}(u, v, x, y)$$

Оценку площади можно найти, зная число внутренних точек сетки, например,

$$h^2 * \text{nnz}(k)$$

Результат будет тем точнее, чем меньше выбранный шаг.

Подход № 3. (обязательно только для претендующих на отлично!)

Если задать характеристическую функцию $\chi(u, v)$, равную единице при попадании точки (u, v) внутрь контура руки и нулю за его пределы, то площадь можно вычислить по формуле $S = \iint \chi(u, v) du dv$. Для вычисления интеграла можно воспользоваться функцией MATLAB `integral2`, например,

$$\text{integral2}(@ (u, v) \chi(u, v, x, y), x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, \dots \\ \text{'RelTol', RelTol, 'Method', 'iterated'})$$

Результат вычислений будет тем точнее, чем меньше `RelTol`, однако не рекомендуется задавать относительную погрешность много меньше 0.01 чтобы не увеличивать время вычислений (в рассматриваемом примере подынтегральная функция имеет резкий скачок на контуре руки и поэтому является сложной для численного интегрирования)

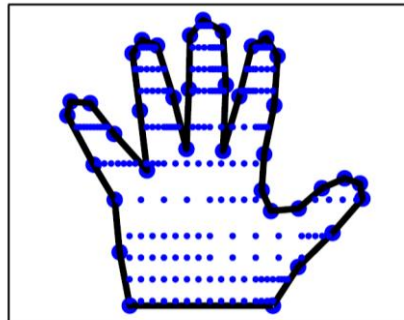


Рис. 3. Контур руки с выделением точек внутри контура, в которых вычисляется подынтегральная функция

Основная сложность здесь будет в задании подынтегральной функции, позволяющей производить вычисления для произвольного числа координат u при единственном значении координаты v (смотри маленькие синие точки, расположенные вдоль каждой из горизонтальных линий на рис. 3) и наоборот. Такой способ задания исходных данных не поддерживается функцией `inpolygon(u, v, x, y)`, для которой размер первых двух переменных должен быть одинаковым (либо числа, либо массивы

одинаковой размерности). Эту проблему можно решить, дополнив функцию `inpolygon`, например,

```
function k = chi(u,v,x,y)
    if length(u) == 1, u = u(ones(size(v))); end
    if length(v) == 1, v = v(ones(size(u))); end
    k = 1*inpolygon(u,v,x,y);
```

(множитель 1 в последней строке необходим, чтобы тип `logical`, возвращаемый функцией `inpolygon` был трансформирован в `double`). Для отладки программы и изучения особенностей работы функции `integral2` потребуется отображать точки, в которых вычисляются значения подынтегральной функции (показанные на рис. 3 мелкими синими точками). Для обновления графического отображения результатов в процессе вычислений рекомендуется использовать функцию `drawnow`.

Порядок выполнения работы

1. Подготовьте исходные данные. Для этого масштабируйте координаты исходных точек на контуре руки, чтобы они были выражены в метрах (масштабные коэффициенты будут отличаться для каждой из осей). Выполните интерполяцию таким методом, который вы сочли лучшим. Таким образом, у вас получилось два набора последовательно расположенных точек: исходный до интерполяции и более точный после интерполяции. Эти два набора точек будут являться входными данными для вычисления площади.

2. Напишите программы для вычисления площади руки с использованием каждого из описанных выше трех подходов. Программа должна предусматривать графический вывод результатов, как показано на рисунках выше. Для третьего подхода следует попробовать альтернативный метод интегрирования ('Method', 'tiled') и пояснить его отличия. Выполните вычисления для каждого из двух наборов точек, т.е. результатом должно быть два числа для первого подхода, две функции зависимости площади от шага сетки для второго подхода и две функции зависимости площади от относительной погрешности для третьего подхода. Представьте результаты в виде графиков.

3. Сравните полученные результаты и сделайте выводы по работе.

Отчетные материалы должны содержать:

1. Фамилию, имя и номер группы.
2. Графики исходных данных (точки на контуре руки, соединенные замкнутой ломаной линией, рис. 1); на осях должны быть нанесены

размерности в метрах (используйте команду `axis equal` для одинакового масштаба по обеим осям).

3. Пример графического вывода с отображением включенных в расчет площади квадратов (рис. 2) для второго подхода и точек, в которых вычислялась подынтегральная функция (рис. 3) для третьего подхода.
4. Текст всех написанных программ.
5. Копию экрана с результатами вычислений.
6. Графики, содержащие результаты вычислений площади.
7. Выводы по работе.